UNIVERSITÉ MOHAMMED I

Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques
Et Informatique
O u j d a

Année Universitaire 2016/2017
Section SMA
Responsable : A. Azizi

FEUILLE D'EXERCICES $N°3$

I. Soient G un groupe fini, P un p-sous-groupe de sylow de G et H un p-sous-groupe de G.

(1) Montrer que si $P \subset N(H)$; alors $P.H$ est un sous groupe d'ordre une puissance de p. En déduire que $H \subset P$.

Réponse
On sait que H est distingué dans son normalisateur $N(H)$ et puisque $P \subset N(H)$, alors P est un sous groupe de $N(H)$ et H un sous groupe distingué de $N(H)$ donc $P.H$ est un sous groupe de $N(H)$. A l'aide du second théorème d'isomorphisme on a $P.H/H \simeq P/H\cap P$ par suite $|P.H| = |H||P/H \cap P| = |H||P|/|H \cap P|$. Comme H et P sont des p-sous groupes alors $P.H$ est un p-sous groupe qui contient P. De plus P est un p-sous groupe de Sylow donc il est maximal dans l'ensemble des p-sous groupes de G, ce qui implique que $P = P.H$. Il s'en suit que $H \subset P$.

(2) Montrer que si $H \subset N(P)$, alors $H \subset P$.

Réponse
Si $H \subset N(P)$ alors $\forall h \in H, hPh^{-1} = P$. Puisque H est un p-sous groupe alors $\forall h \in H$, h est d'ordre une puissance de p. Ainsi, d'après le lemme 2 du cours $\forall h \in H$, $h \in P$. Ce qui veut dire que $H \subset P$.

II. Soient G un groupe fini, p un nombre premier, S un p-sous-groupe de sylow de G et N un sous-groupe distingué de G. Montrer que : $N \cap S$ est un p-sous-groupe de sylow de N, et $N.S/N$ est un p-sous-groupe de sylow de G/N.

Réponse

$N \cap S$ est un p-sous-groupe de N ; donc il existe un p-sous groupe de Sylow Q de N tel que $N \cap S \subset Q$. Puisque Q est un p-sous groupe de G, alors il existe un p-sous groupe de Sylow P de G tel que $Q \subset P$. On a $Q \subset P \cap N$ et puisque Q un p-sous groupe de Sylow de G qui est maximal dans l'ensemble des p-sous groupes de N, alors $Q = P \cap N$. D'autre part, deux p-sous groupes de Sylow de G sont conjugués ; par suite il existe $a \in G$ tel que $S = aPa^{-1}$; de plus puisque N est distingué dans G alors aQa^{-1} est un p-sous groupe de Sylow de N. Montrons que $N \cap S = aQa^{-1}$. Soit $y \in aQa^{-1}$, il existe $x \in Q$ tel que $y = axa^{-1}$. On a $x \in Q = P \cap N$ donc $y = axa^{-1} \in aPa^{-1} = S$ et $y = axa^{-1} \in aNa^{-1} = N$ donc $y \in S \cap N$. D'où $aQa^{-1} \subset N \cap S$, mais aQa^{-1} est un p-sous groupe de Sylow de N(c'est un sous groupe de N dont l'ordre est égal à celui de Q la plus grande puissance de p qui divise l'ordre de N) donc il est maximal dans l'ensemble des p-sous groupes de N ; par suite on a $aQa^{-1} = N \cap S$.

On pose $|G| = p^n h$ avec h et p premier entre eux ; $|H| = p^i h'$ avec h' et p premier entre eux, alors puisque H est un sous groupe de G alors $|H|$ divise $|G|$ et par suite $i \leq n$ et h' divise h. Il vient que $|G/H| = |G|/|H| = p^{n-i}h"$ où $h" = h/h'$ avec p et $h"$ premiers entre eux.

D'autre part, d'après le second théorème d'isomorphisme on a $N.S/N$ est isomorphe à $S/N \cap S$. De plus S est un p-sous groupe de Sylow de G donc son ordre c'est p^n et $N \cap S$ est un p-sous groupe de Sylow de N donc son ordre c'est p^i, par suite l'ordre de $N.S/N$ qui est le même que celui de $S/N \cap S$ est égal à $p^n/p^i = p^{n-i}$ la plus grande puissance de p qui divise l'ordre de G/N ; donc $N.S/N$ est un p-sous groupe de Sylow de G/N.

III. (1) Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G et $L = H \cap K$.

Vérifier que si $(H/L)_d = \{Lh_1, Lh_2, \ldots, Lh_n\}$ alors $KH = \bigcup Kh_i$ et c'est une réunion de parties disjointes de KH. En déduire que $card(KH) = card(K).card(H)/card(L)$.

Réponse
Il est clair que $H = \bigcup Lh_i$ et en multipliant par K à gauche on obtient $KH = \bigcup Kh_i$. Les Lh_i forment une partition de H par suite les Kh_i sont disjoints deux à deux. Sinon, il existe i et j différents tels que $Kh_i \cap Kh_i$ est non vide, donc il existe k_i et k_j dans K tels que $k_ih_i = k_jh_j$ ce qui implique que $k_ik_j^{-1} = h_ih_j^{-1} \in L$. Par suite $Lh_ih_j^{-1} = L$ donc $Lh_i = Lh_j$; ce qui est absurde.
Il s'en suit que $card(KH) = \sum_{i=1}^{n} card(Kh_i) = ncard(K)$. Or $n = card(K)/card(L)$ donc on a $card(KH) = card(K).card(H)/card(L)$.

(2) Soit G un groupe d'ordre p^2q où p et q sont des entiers premiers.

a. On suppose que $p^2 < q$. Vérifier que G contient un sous-groupe distingué d'ordre q. En déduire que G resoluble.

Réponse
Soit N_p(resp. N_q) le nombre des p-sous groupes (resp. q-sous groupes) de Sylow de G. D'après les théorèmes de Sylow on a N_q divise p^2q l'ordre de G et $N_q \equiv 1 \bmod q$; par suite N_q divise p^2. Comme $N_q \equiv 1 \bmod q$, il existe un entier naturel k tel que $N_q = 1 + kq$. Puisque $p^2 < q$ et N_q divise p^2 ; alors k ne peut pas être strictement plus grand que 0 car sinon on aura $N_q = 1 + kq \geq 1 + q > p^2$. Par suite $N_q = 1$; ce qui implique d'après les théorèmes de Sylow que G possède un seul q-sous groupe de Sylow et qu'il est distingué dans G.
Soit H le q-sous groupe de Sylow de G ; alors la suite $G \supset H \supset \{e\}$ est normale dont les quotients des sous groupes successifs de la suite sont abeliens(les groupes d'ordres p^2 ou bien q sont abeliens). Par suite G est resoluble.

b. Montrer que si G possède un seul p-sous-groupe de sylow alors G est resoluble en particulier si $q < p$ alors G est resoluble.

Réponse

Si G possède un seul p-sous groupe de sylow K, alors il est distingué dans G et la suite $G \supset K \supset \{e\}$ est normale dont les quotients des sous groupes successifs de la suite sont abeliens(les groupes d'ordres q ou bien p^2 sont abeliens).Par suite G est resoluble.

En particulier si $q < p$, on a N_p divise p^2q l'ordre de G et $N_p \equiv 1 \mod p$; par suite N_p divise q. Comme $N_p \equiv 1 \mod p$, il existe un entier naturel k tel que $N_p = 1 + kp$. Puisque $q < p$ et N_p divise q ; alors k ne peut pas être strictement plus grand que 0. Par suite $N_p = 1$; ce qui implique d'après les théorèmes de Sylow que G possède un seul p-sous groupe de Sylow et qu'il est distingué dans G.

c. On suppose que $p < q < p^2$ et que G contient au moins deux p-sous-groupes de sylow P_1 et P_2. On pose $P = P_1 \cap P_2$.

   i. En déduire, en utilisant 1), que P est un sous-groupe non trivial distingué dans G. Déterminer l'ordre de G/P.

   Réponse

   Si $P = \{e\}$, alors d'après 1) on a $card(P_1P_2) = card(P_1)card(P_2) = p^2.p^2 = p^4$. Mais $p^4 > p^2q$ ce qui est contraire à $P_1P_2 \subset G$, donc $P \neq \{e\}$. Par suite l'ordre de P est égal p : c'est un diviseur de p^2 et il ne peut pas être égal à p^2 car sinon $P = P_1 = P_2$ ce qui n'est pas notre cas.

   Montrons que P est distingué dans G. Soit $N(P)$ le normalisateur de P. Comme P_1 et P_2 sont d'ordre p^2, ils sont abeliens et puisque $P = P_1 \cap P_2$ alors les éléments de P_1 et P_2 commutent avec tout élément de P ; donc P_1 et P_2 sont inclus dans $N(P)$ et $P_1P_2 \subset N(P)$. On a $card(P_1P_2) = card(P_1)card(P_2)/card(P) = p^2.p^2/p = p^3$. D'autre part $N(P)$ est un sous groupe de G donc son ordre divise p^2q et il contient P_1 donc son ordre est divisible par p^2. Comme *il contient au moins p^3 élḿents alors la seule possibilité qui reste c'est que l'ordre de $N(P)$ c'est p^2q et donc $G = N(P)$; ce qui veut dire que P est distingué dans G. Il est claire que G/P est d'ordre $p.q$.*

ii. Vérifier que G/P est resoluble. En déduire que G est resoluble.

Réponse

Puis que G/P est d'ordre $p.q$, alors il est resoluble(il contient un seul q-sous groupe de sylow qui est distingué et si H/P est le q-sous groupe de Sylow de G/P ; alors la suite $G/P \supset H/P \supset \{P\}$ est normale dont les quotients des sous groupes successifs de la suite sont abeliens). De plus P est abelien donc resoluble. Ainsi comme P est distingué et est resoluble et G/P est resoluble, alors G est resoluble.

IV. Soit G un groupe fini. Considérons un sous-groupe N distingué dans G. Montrer que si T_1 et T_2 sont deux sous-groupes de G/N tels que T_2 est un sous-groupe distingué de T_1 et T_1/T_2 est commutatif, alors G possède deux sous-groupes N_1 et N_2 contenant N et tels que N_2 est distingué dans N_1 et N_1/N_2 est commutatif.

Réponse

Soient T_1 et T_2 deux sous-groupes de G/N, alors d'après le théorème de correspondance il existe deux sous groupes de G, N_1 et N_2 contenant N tels que $T_1 = N_1/N$ et $T_2 = N_2/N$. Puisque T_2 est un sous-groupe distingué de T_1 alors T_1/T_2 est un groupe. Soit f la projection canonique de N_1 dans T_1 et g la projection canonique de T_1 dans T_1/T_2, alors $g \circ f$ est un homomorphisme surjectif de N_1 dans T_1/T_2 et son noyau c'est N_2. Par suite N_2 est un sous groupe distingué de N_1 et $N_1/N_2 \simeq T_1/T_2$. Il vient donc que si T_1/T_2 est abelien alors N_1/N_2 est aussi abelien.

V. Soient p et q deux nombres premiers et G un groupe fini. Soit G un groupe d'ordre p^2q^2 où $p < q$.
1) Supposons que $q > p^2$.

a) Montrer que G possède un seul sous-groupe d'ordre q^2 et qu'il est distingué dans G.

Réponse

Soit N_p(resp. N_q) le nombre des p-sous groupes (resp. q-sous groupes) de Sylow de G. D'après les théorèmes de Sylow on a N_q divise p^2q^2 l'ordre de G et $N_q \equiv 1 \bmod q$; par suite N_q divise p^2. Comme $N_q \equiv 1 \bmod q$, il existe un entier naturel k tel que $N_q = 1 + kq$. Puisque $p^2 < q$ et N_q divise p^2 ; alors k ne peut pas être strictement plus grand que 0. Par suite $N_q = 1$; ce qui implique d'après les théorèmes de Sylow que G possède un seul q-sous groupe de Sylow et qu'il est distingué dans G.

b) En déduire que G est résoluble.

Réponse

Soit H le seul q-sous groupe de Sylow de G qui est d'ordre q^2 ; alors la suite $G \supset H \supset \{e\}$ est normale dont les quotients des sous groupes successifs de la suite sont abeliens(les groupes d'ordres p^2 ou bien q^2 sont abeliens). Par suite G est resoluble.

2) Supposons que $q < p^2$. Soient Q_1 et Q_2 deux q-sous-groupes de Sylow de G et $T = Q_1 \cap Q_2$.

i) Montrer que le normalisateur $N(T)$ de T dans G contient Q_1 et Q_2.

Réponse

Puisque Q_1 et Q_2 sont deux q-sous-groupes de Sylow de G, alors ils sont d'ordre q^2 donc sont abeliens ; parsuite leurs éléments commutent avec tout élément de Q donc Q_1 et Q_2 sont inclus $N(Q)$.

ii) En déduire en utilisant l'exercice III 1), que T est un sous-groupe non trivial distingué dans G et que $card(G/T) = p^2q$.

Réponse

Si $T = \{e\}$, alors d'après III 1) on a $card(Q_1Q_2) = card(Q_1)card(Q_2) = q^2.q^2 = q^4$. Mais $q^4 > p^2q^2$ ce qui est contraire à $Q_1Q_2 \subset G$, donc

$T \neq \{e\}$. Par suite l'ordre de T est égal q : c'est un diviseur de q^2 et il ne peut pas être égal à q^2 car sinon $T = Q_1 = Q_2$ ce qui n'est pas notre cas.
Montrons que T est distingué dans G.
On a $card(Q_1Q_2) = card(Q_1)card(Q_2)/card(T) = q^2.q^2/q = q^3$. D'autre part $N(T)$ est un sous groupe de G donc son ordre divise p^2q^2 et il contient Q_1 donc son ordre est divisible par q^2. Comme il contient au moins q^3 élḿents alors la seule possibilité qui reste c'est que l'ordre de $N(T)$ c'est p^2q^2 (il ne peut pas être pq^2 car $N(T)$ contient q^3 élḿents et $q > p$) et donc $G = N(T)$; ce qui veut dire que T est distingué dans G. Il est est claire que G/T est d'ordre $p^2.q$.

iii) En utilisant le fait qu'un groupe d'ordre p^2q est résoluble et l'exercice IV), montrer que G est résoluble.

Réponse

Comme G/T est d'ordre $p^2.q$; alors une suite normale ne peut pas avoir plus de deux sous groupes propres T_1 et T_2 :

$$G/T \supset T_1 = N_1/T \supset T_2 = N_2/T \supset \{T\}$$

et par suite d'après l'exercice IV) la suite

$$G \supset N_1 \supset N_2 \supset T \supset \{e\}$$

est une suite normale dont les quotients de tous les sous-groupes successifs sont abeliens donc G est resoluble. Il en est de même si la suite normale contient moins de deux sous groupes propres.