UNIVERSITÉ MOHAMMED I
Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques
O u j d a

Année Universitaire 2019/2020
Section SMA (S6)
Responsable : A. Azizi

Problème (ancien Examen)

I. Soient E l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{S}_4$ le groupe des permutations de E, $\mathcal{A}_4$ le sous-groupe des permutations paires de $\mathcal{S}_4$ et V_4 le sous-groupe des permutations d'ordre deux de $\mathcal{A}_4$. On désigne par (ij) la transposition qui change i et j entre eux et laisse fixe les autres et par (ijk) le 3-cycle σ défini par : $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = k$ et $\sigma(k) = i$ (i, j et k sont différents deux à deux) et laisse fixe les autres. On note par e l'élément neutre de $\mathcal{S}_4$ et $\langle\sigma\rangle$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ engendré par σ.

(1) Vérifier que $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ et qu'il est distingué dans $\mathcal{S}_4$.

(2) Soit S'_3 le stabilisateur de l'élément 4 de E, montrez que

$$S'_3 \cap V_4 = \{e\}, \quad S'_3 V_4 = \mathcal{S}_4, \quad \mathcal{S}_4/V_4 \simeq S'_3.$$

(3) En déduire que $\Omega = \{V_4, \langle(12)\rangle V_4, \langle(13)\rangle V_4, \langle(23)\rangle V_4, \langle(123)\rangle V_4 = A_4, \mathcal{S}_4\}$ est l'ensemble de tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_4$ contenant V_4.

(4) Déterminez les 3 sous-groupes de sylow de $\mathcal{S}_4$.

(5) Déterminez les 2 sous-groupes de sylow de $\mathcal{S}_4$.

(6) En déduire tous les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ contenant V_4.

Solution du Problème

I. Soient E l'ensemble $\{1,2,3,4\}$, $\mathcal{S}_4$ le groupe des permutations de E, $\mathcal{A}_4$ le sous-groupe des permutations paires de $\mathcal{S}_4$ et V_4 le sous-groupe des permutations d'ordre deux de $\mathcal{A}_4$. On désigne par (ij) la transposition qui change i et j et par (ijk) le 3-cycle σ défini par : $\sigma(i)=j$, $\sigma(j)=k$ et $\sigma(k)=i$ (i, j et k sont différents deux à deux). On note par e l'élément neutre de $\mathcal{S}_4$ et $\langle\sigma\rangle$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ engendré par σ.

(1) On peut voir facilement que les seules permutations d'ordre deux et qui sont des permutations paires sont les produits de deux transpositions agissants sur des ensembles disjoints. Si on pose $\{i,j,k,l\}=\{1,2,3,4\}$ et comme pour tout élément $\sigma\in V_4$ on a $\sigma^2=e$; alors si $\sigma\neq e$, il existe $i\in\{1,2,3,4\}$ tel que $\sigma(i)\neq i$. On pose $\sigma(i)=j$ et puisque $\sigma^2=e$ alors $\sigma(j)=i$. Donc σ échange k et l entre eux ou bien elle les laisse fixes. S'ils sont laissés fixes alors σ sera une transposition ; mais une transposition n'appartient pas à A_4 par suite elle ne peut pas appartenir à V_4. Ainsi la seule solution est que σ échange k et l et donc $\sigma=(ij)(kl)$. Ainsi, on a

$$V_4=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}.$$

Soient $\sigma\in V_4$ et $\tau\in\mathcal{S}_4$, montrons que $\tau\sigma\tau^{-1}\in V_4$. On a

$$(\tau\sigma\tau^{-1})^2=\tau\sigma\tau^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}=\tau\sigma e\sigma\tau^{-1}=\tau\sigma^2\tau^{-1}=\tau e\tau^{-1}=e,$$

et de plus, $\tau\sigma\tau^{-1} \in \mathcal{A}_4$ puisqu'elle se décompose en un nombre pair de transpositions. Ainsi $\tau\sigma\tau^{-1} \in V_4$. D'où V_4 est distingué dans $\mathcal{S}_4$.

(2) Soit S'_3 le stabilisateur de l'élément 4 de E.

a. Soit $\sigma \in V_4 \backslash \{e\}$, alors $\sigma(4) \neq 4$; parsuite $\sigma \notin S'_3$. Ainsi $S'_3 \cap V_4 = \{e\}$.

b. Il est clair que $S'_3 = \{e, (12), (23), (13), (123), (132)\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ et puisque V_4 est distingué dans S_4 alors , alors S'_3V_4 est un sous groupe de S_4. D'après le deuxième théorème d'isomorphisme, on a

$$S'_3V_4/V_4 \simeq S'_3/S'_3 \cap V_4 = S'_3/\{e\} \simeq S'_3. \qquad (1)$$

Donc $|S'_3V_4/V_4| = \frac{|S'_3V_4|}{|V_4|} = |S'_3|$, ce qui donne $|S'_3V_4| = |V_4| \times |S'_3| = 6 \times 4 = 24$. Comme S'_3V_4 est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$, alors on déduit que $S'_3V_4 = \mathcal{S}_4$.

c. Comme $S'_3V_4 = \mathcal{S}_4$ et $S'_3V_4/V_4 \simeq S'_3$, alors on a $\mathcal{S}_4/V_4 \simeq S'_3$.

(3) On vérifie facilement qu'il existe une bijection entre les sous-groupes de $\mathcal{S}_4$ contenant V_4 et les sous-groupes de $\mathcal{S}_4/V_4 \simeq S'_3$. Soit H un sous-groupe de $S'{}_3$, alors il est d'ordre 1, 2, 3 ou 6.
Si H est d'ordre 2, alors il est engendré par (12), (23) ou (13), et donc $\langle(12)\rangle V_4$, $\langle(23)\rangle V_4$ et $\langle(13)\rangle V_4$ sont dans Ω.
Si H est d'ordre 3, alors il est engendré par le 3-cycle (123), donc $\langle(123)\rangle V_4$ est dans Ω. Montrons d'abord que $\langle(123)\rangle V_4 = \mathcal{A}_4$; comme $\langle(123)\rangle \cap V_4 = \{e\}$, alors, d'après le deuxième théorème d'isomorphisme, on a $\langle(123)\rangle V_4/V_4 \simeq$

$\langle(123)\rangle$, donc $|\langle(123)\rangle V_4| = 3\times 4 = 12$. Parsuite, $\langle(123)\rangle V_4 = \mathcal{A}_4$ car $\langle(123)\rangle V_4$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}_4$ qui a le même ordre que $\mathcal{A}_4$.
Si H est d'ordre 6, alors $H = S_3'$, et donc $S_3'V_4 = \mathcal{S}_4$ est dans Ω.
Ainsi, $\Omega = \{V_4, \langle(12)\rangle V_4, \langle(13)\rangle V_4, \langle(23)\rangle V_4, \langle(123)\rangle V_4 = \mathcal{A}_4, \mathcal{S}_4\}$ est l'ensemble de tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_4$ contenant V_4.

(4) D'après les théorèmes de Sylow, N_3 le nombre des 3-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{S}_4$ est congru à 1 modulo 3 et divise $24 = 8\text{x}3$. Ce nombre étant congru à 1 modulo 3 est donc premier avec 3. Par suite le nombre N_3 divise 8. Or les seuls diviseurs de 8 congrus à 1 modulo 3(ou bien qu'on peut écrire sous la forme $1 + 3k$)) sont $N_3 = 1$ ou bien $N_3 = 4$. Ainsi N_3, le nombre des 3-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{S}_4$, ne peut être égal qu'à 1 ou 4. D'autre part, un 3-sous-groupe de Sylow est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ dont l'ordre est la plus grande puissance de 3 qui divise l'ordre du groupe $\mathcal{S}_4$ qui est égal à 24 ; donc l'ordre d'un 3-sous groupe de Sylow dans notre cas est égal à 3. Par conséquent les sous-groupes $\langle 123\rangle$, $\langle 134\rangle$, $\langle 234\rangle$ et $\langle 124\rangle$ sont des 3-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{S}_4$ et donc $N_3 = 4$.

(5) Toujours d'après les théorèmes de Sylow, N_2 le nombre des 2-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{S}_4$ est congru à 1 modulo 2 et divise $24 = 8\text{x}3$. Ce nombre étant congru à 1 modulo 2 est donc premier avec 2. Par suite le nombre N_2 divise 3. Ainsi on a $N_2 = 1$ ou bien $N_2 = 3$. Un 2-sous-groupe de Sylow est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ dont l'ordre est égal à

la plus grande puissance de 2 qui divise 24 qui est égale 8. Par suite, les sous-groupes $\langle 12\rangle V_4$, $\langle 13\rangle V_4$ et $\langle 23\rangle V_4$ sont différents et d'ordre 8, et donc ce sont tous les 2-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{S}_4$ puisqu'ils sont en nombre de 3. Ainsi on a $N_2 = 3$.

(6) Puisque les 2-sous-groupes de Sylow $\langle 12\rangle V_4$, $\langle 13\rangle V_4$ et $\langle 23\rangle V_4$ sont différents, alors ils ne sont pas distingués dans $\mathcal{S}_4$. On en déduit que les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ contenant V_4 sont V_4, $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{S}_4$.

Remarque

Soient G un groupe fini, H un sous-groupe distingué de G et K et L deux sous-groupes de G contenant H. Soit K/H l'ensemble des classes d'équivalences modulo H ; alors K est réunion disjointe de ses classes d'équivalences modulo H. De même L est réunion disjointe de ses classes d'équivalences modulo H. Par suite si $K/H = L/H$, alors du fait qu'ils ont les mêmes classes d'équivalences alors $K = L$. Ainsi il y a une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G contenant H et l'ensemble des sous-groupes de G/H. La réciproque ce n'est rien autre que le théorème de correspondance.